

**Dimensionamento otimizado de vigas T de concreto armado: estudo comparativo entre as versões ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2007**

**Optimized design of reinforced concrete T-beams: comparative study between the ABNT NBR 6118:2014 and ABNT NBR 6118:2007 versions**

**Diseño optimizado de vigas en T de hormigón armado: estudio comparativo entre las versiones ABNT NBR 6118:2014 y ABNT NBR 6118:2007**

DOI: 10.54033/cadpedv21n5-219

Originals received: 04/29/2024

Acceptance for publication: 05/17/2024

---

**Matheus Drago Romano**

Graduado em Engenharia Civil

Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Endereço: Campo Mourão, Paraná, Brasil

E-mail: matheus\_dromano@hotmail.com

**Leandro Waidemam**

Doutor em Engenharia de Estruturas

Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Endereço: Campo Mourão, Paraná, Brasil

E-mail: waidemam@utfpr.edu.br

**Tatiane Cazarin da Silva**

Doutora em Métodos Numéricos em Engenharia

Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Endereço: Campo Mourão, Paraná, Brasil

E-mail: tatianecazarin@utfpr.edu.br

**Michele Carvalho de Barros**

Doutora em Educação Para a Ciência e o Ensino de Matemática

Instituição: Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Endereço: Campo Mourão, Paraná, Brasil

E-mail: mcbarros@utfpr.edu.br

---

**RESUMO**

Um projeto estrutural deve ser concebido com o objetivo de assegurar a segurança e a funcionalidade da edificação, e de forma a minimizar os custos de

sua construção. Os dois primeiros aspectos são garantidos a partir do cumprimento dos critérios estabelecidos pelas normas técnicas. Já para minimizar os custos de construção, os projetistas têm em seu alcance a otimização matemática como uma poderosa ferramenta na tomada de decisões. Diante desse contexto, este trabalho apresenta um estudo comparativo, em termos econômicos, de projetos otimizados de vigas T de concreto armado seguindo as especificações estabelecidas pelas versões de norma ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2007. Para isso, são apresentados modelos matemáticos que, a partir do momento fletor de cálculo, determinam a seção transversal otimizada de tais elementos (dimensões da seção transversal e área de armadura tracionada e comprimida), respeitando o equilíbrio da seção transversal, disposições construtivas e condições de restrição estabelecidas pelas duas versões de norma. Para a implementação computacional do algoritmo de minimização matemática aplicado ao modelo foi utilizado o software MATLAB e a rotina `fmincon` presente em sua biblioteca auxiliar de otimização, sendo empregado o Método dos Pontos Interiores como método iterativo para determinação da solução ótima do problema restrito. De forma a realizar análises e estabelecer comparativos, são apresentados resultados obtidos em dois contextos distintos: um primeiro, contemplando as restrições estabelecidas pela versão ABNT NBR 6118:2007; e um segundo, atendendo o exposto pela versão ABNT NBR 6118:2014. Os resultados mostram-se significativos no contexto da otimização do custo dos problemas modelados e permitem concluir que a versão ABNT NBR 6118:2014 leva ao dimensionamento de vigas T ligeiramente menos econômicas que a sua versão anterior.

**Palavras-chave:** Otimização Estrutural. Concreto Armado. Vigas T. Edificações.

### ABSTRACT

A structural design must be designed to ensure the safety and functionality of the building, while also minimizing construction costs. The first two aspects are guaranteed by meeting the criteria established by technical standards. To minimize construction costs, designers have at their disposal mathematical optimization as a powerful tool in decision-making. In this context, this paper presents a comparative study, in economic way, between optimal projects of reinforced concrete T-beams made in accord to the ABNT NBR 6118:2014 and ABNT NBR 6118:2007 versions. For this, mathematical models are presented which, from the bending moment, determine the optimized cross section of such elements (cross section dimensions and tensile and compressive steel reinforcing rods) respecting the equilibrium of the cross section, structural arrangements and restrictions established by the two versions of the standard. For the computational implementation of the mathematical minimization algorithm applied to the model, we use the MATLAB software and `fmincon` routine present in its optimization toolbox, being employed the Interior Point Method was used as interactive method to determinate the optimal solution of the restricted problem. In order to carry out analyzes and comparative, the results were presented in two different contexts: first one, taking to account the ABNT NBR 6118:2007 version requirements; and other, taking to account the ABNT NBR 6118:2014 version requirements. The results are significant in the context of cost optimization of

modeling problems, and enable us to conclude that the design of T-beams considering the ABNT NBR 6118: 2014 version is slightly more expensive than one designed considering its previous version.

**Keywords:** Structural Optimization. Reinforced Concrete. T-Beams. Building.

## RESUMEN

Un proyecto estructural debe diseñarse con el objetivo de garantizar la seguridad y funcionalidad del edificio, y de forma que se minimicen sus costes de construcción. Los dos primeros aspectos se garantizan mediante el cumplimiento de los criterios establecidos por las normas técnicas. Para minimizar los costes de construcción, los proyectistas pueden utilizar la optimización matemática como potente herramienta de decisión. En este contexto, este trabajo presenta un estudio comparativo, en términos económicos, de diseños optimizados de vigas en T de hormigón armado siguiendo las especificaciones establecidas por las normas ABNT NBR 6118:2014 y ABNT NBR 6118:2007. Para ello, se presentan modelos matemáticos que, a partir del momento flector de cálculo, determinan la sección optimizada de dichos elementos (dimensiones de la sección y área de las armaduras de tracción y compresión), respetando el equilibrio de la sección, las disposiciones constructivas y las condiciones de restricción establecidas por las dos versiones de la norma. Para la implementación computacional del algoritmo matemático de minimización aplicado al modelo, se utilizó el software MATLAB y la rutina fmincon presente en su librería auxiliar de optimización, empleándose el Método de Puntos Interiores como método iterativo para la determinación de la solución óptima del problema restringido. Con el objetivo de realizar análisis y establecer comparaciones, se presentan los resultados obtenidos en dos contextos diferentes: en primer lugar, considerando las restricciones establecidas por la ABNT NBR 6118:2007 versión; y en segundo lugar, atendiendo a la ABNT NBR 6118:2014 versión. Los resultados son significativos en el contexto de la optimización del costo de los problemas modelados y permiten concluir que la versión ABNT NBR 6118:2014 conduce al diseño de vigas en T ligeramente menos económicas que su versión anterior.

**Palabras clave:** Optimización Estructural. Hormigón Armado. Vigas en T. Edificio.

## 1 INTRODUÇÃO

Otimizar é uma ação que visa extrair a melhor solução possível, num certo contexto, e que norteia todas as ciências. A engenharia sempre busca soluções otimizadas nas suas diversas áreas de atuação, seja o menor custo para atender uma determinada função, a menor massa, o menor tempo de execução ou também o máximo desempenho (Pinto Júnior, 2006).

Segundo Nogueira (2010), na construção civil existe uma linha tênue entre a economia e a segurança da edificação. Elas se divergem em relação ao custo, e equilibrar ambas, nem sempre é uma tarefa simples. Neste contexto, as técnicas de otimização surgem com a finalidade de extrair do produto ou serviço seu rendimento máximo. Na engenharia estrutural, elas podem ser aplicadas com a função de determinar, entre as inúmeras soluções possíveis, a que melhor satisfaz critérios definidos, de forma a encontrar a estrutura mais econômica, atendendo às restrições arquitetônicas, de segurança e construtivas (Rodrigues, 2018).

Uma viga é um elemento estrutural que tem a função de transferir os esforços verticais recebidos da laje para o pilar. Nela, há determinadas variáveis de projeto como, por exemplo, geometria da seção transversal, materiais empregados e bitolas das barras de aço, que interferem em seu dimensionamento.

Segundo a ABNT NBR 6118:2014 a ação conjunta entre lajes e vigas pode ser considerada por meio da parcela de largura colaborante da laje juntamente a viga, constituindo uma seção transversal T. Com o intuito de otimizar vigas com seção T, essa configuração de seção possui destaque devido a sua eficiência, pois aumenta a zona de concreto comprimida e também reduz a quantidade de concreto na zona tracionada da viga, onde este é desprezado para efeitos de cálculo, pois sua influência é nula nos estádios II e III (Silva, 2011).

Buscando associar a otimização matemática com a construção civil, este trabalho tem como objetivo apresentar um algoritmo de otimização matemática que determina a solução ótima da seção transversal de vigas de seção T de concreto armado, submetidas a flexão simples, atendendo aos requisitos estabelecidos pela ABNT NBR 6118:2014. Adicionalmente, apresenta-se um estudo comparativo entre seções ótimas projetadas de acordo com as versões de norma ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2007 de modo a avaliar os impactos econômicos produzidos pela versão atualizada.

## 2 FUNÇÃO CUSTO

O custo de produção de uma viga de seção T de concreto armado pode ser obtida através da quantificação dos materiais que a compõe (aço e concreto)

e também das fôrmas que deverão ser utilizadas no processo de concretagem. Pinto Junior (2006), Silva *et al.* (2010) e Correia *et al.* (2017) determinam a função objetivo, na unidade de custo por comprimento, representada por:

$$F(b_w, h_w, b_f, h_f, A_s, A'_s) = (b_w \cdot h_w + b_f \cdot h_f) \cdot C_c + (A_s + A'_s) \cdot \rho_s \cdot C_s + (2 \cdot (h_w + h_f) + b_f) \cdot C_F \quad (1)$$

sendo:

- $F$  a função custo, por unidade de comprimento;
- $C_c$  o custo do concreto, por unidade de volume;
- $C_s$  o custo do aço, por unidade de massa;
- $C_F$  o custo da fôrma, por unidade de área;
- $b_w$  a largura da alma da seção transversal;
- $b_f$  a largura da mesa da seção transversal;
- $h_w$  a altura da alma da seção transversal;
- $h_f$  a largura da mesa da seção transversal  $\rho$  a massa específica do aço; e
- $A_s$  e  $A'_s$  as áreas de armadura tracionada e comprimida, respectivamente.

Na equação (1) a soma das alturas  $h_w$  e  $h_f$  pode ainda ser substituída pela soma da altura útil  $d$  da seção e do cobrimento da armadura  $d'$  e, para se obter o custo total do elemento, a função deve ser multiplicada pelo comprimento do elemento.

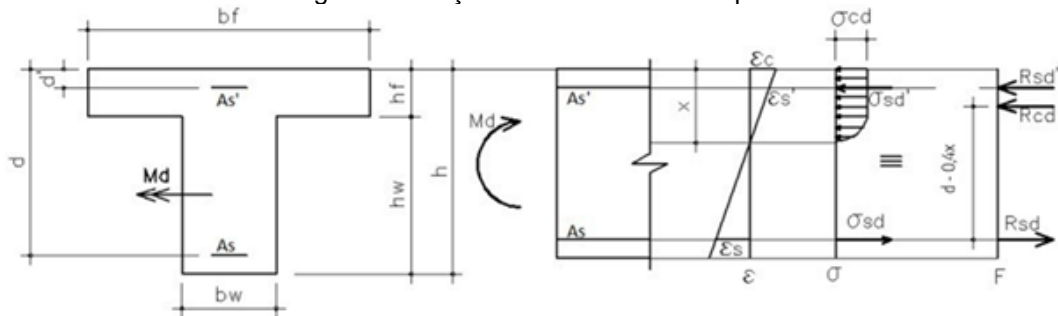
### 3 CONDIÇÕES DE RESTRIÇÃO

#### 3.1 CONDIÇÕES DE EQUILÍBRIO

As equações de equilíbrio são de suma importância para se projetar as dimensões da seção transversal e as áreas de aço tracionadas e comprimidas de uma viga. O dimensionamento é baseado no estado limite último (ELU) que é referente a resistência da seção transversal antes de sua ruptura.

Na Figura 1, é apresentada uma viga de seção T genérica submetida ao momento de cálculo  $M_d$  e também são apresentados o diagrama de deformação e de tensão atuante, dando destaque para o diagrama parábola-retângulo atuante no concreto e as tensões de tração e compressão nas armaduras.

Figura 1 – Seção T com armadura dupla.



Fonte: Adaptado de Carvalho e Figueiredo Filho (2014).

Escrevendo-se as equações de equilíbrio estático, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{sd} - R_{cd1} - R_{cd2} - R_{sd'} = 0 \quad (2)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_d - R_{sd'}(d - d') - R_{cd1}(d - 0,5h_f) - R_{cd2}(d - 0,4x) = 0 \quad (3)$$

em que:

$R_{cd}$  é a resultante de compressão atuante no concreto comprimido e pode ser separada em  $R_{cd1}$ , referente ao concreto comprimido localizado nas abas da mesa, e  $R_{cd2}$ , referente ao concreto comprimido localizado na nervura da seção transversal;  $R_{sd'}$  é a resultante de compressão atuante na armadura comprimida;  $R_{sd}$  é a resultante de tração atuante na armadura tracionada;  $M_d$  é o momento fletor solicitante de cálculo que age na seção transversal;  $x$  é a altura da linha neutra; e a somatória de momentos é calculada em relação ao ponto em que passa a força resultante da armadura tracionada.

Vale ressaltar que essas equações são válidas apenas para seções T verdadeiras, ou seja, apresentam  $h_f \leq 0,8x$ .

Com base na ABNT NBR 6118:2014, que impõe coeficientes de segurança na resistência do concreto e do aço e restrição na área de compressão do concreto, as resultantes no concreto  $R_{cd1}$  e  $R_{cd2}$  nas armaduras  $R_{sd'}$  e  $R_{sd}$  são:

$$R_{cd1} = (b_f - b_w) \cdot 0,85f_{cd} \cdot h_f \quad (4)$$

$$R_{cd2} = b_w \cdot 0,85f_{cd} \cdot 0,8x \quad (5)$$

$$R_{sd'} = A_s' \cdot \sigma_{sd'} \quad (6)$$

$$R_{sd} = A_s \cdot \sigma_{sd} \quad (7)$$

Nas equações (4), (5), (6) e (7),  $f_{cd}$  é a resistência de cálculo à compressão do concreto,  $\sigma_{sd'}$  a tensão de cálculo na armadura comprimida e  $\sigma_{sd}$  a tensão de cálculo na armadura tracionada.

Substituindo-se as Equações (4), (5), (6) e (7) nas Equações (2) e (3), obtém-se:

$$A_s \cdot \sigma_{sd} - (b_f - b_w) \cdot 0,85f_{cd} \cdot h_f - b_w \cdot 0,85f_{cd} \cdot 0,8x - A_s' \cdot \sigma_{sd'} = 0 \quad (8)$$

$$M_d - (b_f - b_w) \cdot 0,85f_{cd} \cdot h_f \cdot (d - 0,5h_f) - b_w \cdot 0,68f_{cd} \cdot x \cdot (d - 0,4x) + -A_s' \cdot \sigma_{sd'} \cdot (d - d') = 0 \quad (9)$$

### 3.2 CONDIÇÕES DE DUTILIDADE

Com base na ABNT NBR 6118:2014, a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor for a relação  $\frac{x}{d}$ , maior será essa capacidade. Para dispor de um comportamento dútil para vigas, a posição da linha neutra no ELU deve ser considerada a partir da resistência característica do concreto ( $f_{ck}$ ), devendo obedecer aos seguintes limites:

a)  $\frac{x}{d} \leq 0,45$ , para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ; (10)

b)  $\frac{x}{d} \leq 0,35$ , para concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ . (11)

### 3.3 VALORES LIMITES PARA ARMADURAS LONGITUDINAIS EM VIGAS

Para que não haja uma ruptura frágil, a ABNT NBR 6118:2014 prescreve a necessidade de armadura mínima de tração, conforme a Equação que segue:

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \quad (12)$$

em que:

$A_{s,min}$  é a armadura mínima de tração,  $\rho_{min}$  a taxa mínima de armadura e  $A_c$  a área de concreto da viga de seção T, dada por  $A_c = b_w \cdot h_w + b_f \cdot h_f$ .

Na norma citada,  $\rho_{min}$  não apresenta valor tabelado e deve ser calculado a partir do momento mínimo estabelecido pela norma. Devido a semelhança dos resultados de armadura mínima calculados a partir do estabelecido nas versões ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2007, optou-se por trabalhar neste trabalho com a taxa mínima de armadura de flexão em vigas estabelecido na Figura 2.



Figura 2 – Taxas mínimas de armadura de flexão para vigas.

Forma da seção	Valores de $\rho_{min}^{1)}$ ( $A_{s,min}/A_c$ )							
	$\omega_{min}$ \ / \ $f_{ck}$	20	25	30	35	40	45	50
Retangular	0,035	0,150	0,150	0,173	0,201	0,230	0,259	0,288
T (mesa comprimida)	0,024	0,150	0,150	0,150	0,150	0,158	0,177	0,197
T (mesa tracionada)	0,031	0,150	0,150	0,153	0,178	0,204	0,229	0,255
Circular	0,070	0,230	0,288	0,345	0,403	0,460	0,518	0,575

<sup>1)</sup> Os valores de  $\rho_{min}$  estabelecidos nesta tabela pressupõem o uso de aço CA-50,  $\gamma_c = 1,4$  e  $\gamma_s = 1,15$ . Caso esses fatores sejam diferentes,  $\rho_{min}$  deve ser recalculado com base no valor de  $\omega_{min}$  dado.

NOTA Nas seções tipo T, a área da seção a ser considerada deve ser caracterizada pela alma acrescida da mesa colaborante.

Fonte: ABNT NBR 6118:2007.

### 3.4 ARMADURAS DE TRAÇÃO E COMPRESSÃO

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, os valores máximos para as armaduras decorrem da necessidade de se assegurar condições de utilidade e de se respeitar o campo de validade dos ensaios que deram origem às prescrições de funcionamento do conjunto aço-concreto. Devido a isso, as armaduras de compressão e tração não devem superar 4% da área de concreto da seção transversal da viga ( $A_c$ ), calculada na região fora da zona de emendas e também garantindo as condições de utilidade presentes na norma.

### 3.5 ANÁLISE DA SEÇÃO T “VERDADEIRA”

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2014), uma seção de viga é considerada T quando a mesa e parcela da alma estiverem sendo comprimidas. Caso contrário, dependendo do sentido do momento fletor, apenas parte superior da mesa ou inferior da alma estarão comprimidas, implicando em uma zona comprimida retangular.

Devido a essa consideração e com o ajuste da área de compressão do concreto, a altura da mesa deve ser menor que 80% da altura da linha neutra da

seção transversal ( $h_f \leq 0,8x$ ). Também é necessário considerar que a largura da mesa deve ser superior à largura da alma ( $b_f > b_w$ ).

### 3.6 LARGURA COLABORANTE DE VIGAS DE SEÇÃO T

De acordo com a ABNT NBR 6118:2014, quando a laje e a viga forem modeladas sem a consideração automática em ação conjunta, uma parcela da laje pode contribuir para as solicitações estruturais de compressão e assim, a viga acaba adquirindo o formato de seção T.

A largura colaborante  $b_f$  é determinada pela norma citada pela inequação que segue:

$$b_f \leq b_w + 0,1 \cdot a \quad (13)$$

onde:

“a” é a distância entre pontos de momento fletor nulo, para cada lado da viga onde se encontra a laje colaborante.

A norma também permite que “a” seja estimado a partir da condição de vinculação da viga. Para esse trabalho, será utilizado a distância estimada, como demonstrado na Tabela 1, onde L é o comprimento do tramo considerado.

Tabela 1 – Distância estimada entre pontos de momento fletor nulo.

Item	Vínculo dos apoios	a
1	Viga simplesmente apoiada	1,00a
2	Tramo com momento em uma só extremidade	0,75a
3	Tramo com momento nas duas extremidades	0,60a
4	Tramo em balanço	2,00a

Fonte: Autoria própria.

### 3.7 DIMENSÕES LIMITE

A ABNT NBR 6118:2014 determina valor limite mínimo para as dimensões de elementos estruturais de concreto para evitar um desempenho insuficiente dos mesmos e proporcionar condições de execução adequadas. A norma citada impõe que a seção transversal das vigas não pode apresentar largura menor que 12 cm, com exceção de casos específicos.

Além disso, as vigas isostáticas devem apresentar relação  $\frac{L}{h} \geq 2$  e as vigas contínuas devem apresentar  $\frac{L}{h} \geq 3$ , em que  $L$  é o comprimento do vão teórico (ou o dobro do comprimento teórico no caso de balanço) e  $h$  é a altura total da viga. Caso contrário, de acordo com a norma citada, a viga deve ser tratada como viga-parede.

### 3.8 ALTURA MÍNIMA DA MESA

A ABNT NBR 6118:2014 não especifica uma altura mínima da mesa exclusiva para vigas de seção T. No entanto, a norma considera a seção T formada pela contribuição da laje à viga. Além disso, a ABNT NBR 6118:2014 estabelece a espessura mínima das lajes que, indiretamente, será considerada, neste trabalho, como uma restrição à altura mínima da viga de seção T. Na subseção 13.2.4.1 da norma citada, a espessura mínima de lajes de pisos não em balanço é de 8 cm.

### 3.9 INSTABILIDADE LATERAL DE VIGAS

Segundo a ABNT NBR 6118:2014, a instabilidade lateral de vigas deve ser garantida através de procedimentos adequados. Para isso, e levando em consideração a situação de uma viga no formato transversal T, a largura da mesa deve satisfazer as condições de  $b_f \geq \frac{L_0}{50}$  e  $b_f \geq b_{fl} \cdot h$ , sendo  $L_0$  o comprimento do flange comprimido nos suportes que realizam o contraventamento lateral, e

$b_{fl}$  um coeficiente relativo ao formato da viga, que para o caso estudado, tem o valor de 0,4.

### 3.10 ARMADURA DE PELE

Para a ABNT NBR 6118:2014, vigas com altura igual ou inferior a 60 cm de altura isenta a utilização da armadura de pele. Caso houver altura maior, a menor taxa de armadura lateral deve ser 0,10% de  $A_{c,alma}$  em cada face da alma da viga e feita por barras de CA-50 ou CA-60, com espaçamento menor que 20 cm e devidamente ancorada nos apoios, além de que as armaduras de tração e compressão não devem ser contabilizadas no cálculo da armadura de pele. Este trabalho desconsiderou a utilização de armaduras de pele para otimização das variáveis da viga.

### 3.11 COMPARATIVO ENTRE A ABNT NBR 6118:2007 E ABNT NBR 6118:2014

A ABNT, que tem o intuito de padronizar os procedimentos de diversas naturezas, como as tecnológicas, industriais, serviços e acadêmicos, com a finalidade de tornar unânime os parâmetros obrigatórios de produção, está sempre se adequando para atender as necessidades de segurança e isso acaba gerando atualizações em suas publicações.

Buscando analisar essas atualizações especificamente na norma destinada ao projeto de estruturas de concreto, serão feitas comparações entre as versões de norma ABNT NBR 6118:2007 e ABNT NBR 6118:2014, em que elas divergem, baseado nas restrições apresentadas.

Tabela 2 – Comparativo entre a ABNT NBR 6118:2007 e ABNT NBR 6118:2014.

Item	ABNT NBR 6118:2007	ABNT NBR 6118:2014
Altura mínima da mesa	$h_f \geq 7 \text{ cm}$	$h_f \geq 8 \text{ cm}$
Dimensões limites (vigas isostáticas)	$L/h \geq 3$	$L/h \geq 2$
Dimensões limites (vigas contínuas)	$L/h \geq 2$	$L/h \geq 3$
Condições de ductilidade (momento negativo)	$x/d \leq 0,628$	$x/d \leq 0,45$ para $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ $x/d \leq 0,35$ para $50 \text{ MPa} \leq f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$

Condições de utilidade (momento positivo)	$x/d \leq 0,5$ para $f_{ck} \leq 35$ MPa $x/d \leq 0,4$ para $f_{ck} \geq 35$ MPa	$x/d \leq 0,45$ para $f_{ck} \leq 50$ MPa $x/d \leq 0,35$ para $50$ MPa $\leq f_{ck} \leq 90$ MPa
--	--	--

Fonte: Autoria própria.

Vale ressaltar que existem também outras diferenças entre as versões de norma que não foram apresentadas por não serem relevantes para o trabalho aqui desenvolvido.

#### 4 DEFINIÇÃO DO PROBLEMA MATEMÁTICO

Definidas a função objetivo do problema (equação (1)), as restrições de equilíbrio estático (equações (8) e (9)), e demais restrições impostas pela ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2007, itens 3.2 ao 3.11, o problema de otimização matemática para vigas isostáticas compostas por concreto com  $f_{ck} \leq 50$  MPa pode ser assim definido:

Minimizar:

$$F(b_w, h_w, b_f, h_f, A_s, A'_s) = (b_w \cdot h_w + b_f \cdot h_f) \cdot C_c + (A_s + A'_s) \cdot \rho_s \cdot C_s + (2 \cdot (h_w + h_f) + b_f) \cdot C_F \quad (14)$$

Sujeito a

$$A_s \cdot \sigma_{sd} - (b_f - b_w) \cdot 0,85f_{cd} \cdot h_f - b_w \cdot 0,85f_{cd} \cdot 0,8x - A'_s \cdot \sigma_{sd'} = 0 \quad (15)$$

$$M_d - (b_f - b_w) \cdot 0,85f_{cd} \cdot h_f \cdot (d - 0,5h_f) - b_w \cdot 0,68f_{cd} \cdot x \cdot (d - 0,4x) - A'_s \cdot \sigma_{sd'} \cdot (d - d') = 0 \quad (16)$$

$$x \leq 0,45d \quad (17)$$

$$b_w \geq 12 \text{ cm} \quad (18)$$

$$L/h \geq 2 \quad (19)$$

$$A_s \geq \rho_{\min} \cdot A_c \quad (20)$$

$$A_s + A_s' \leq 4\% \cdot A_c \quad (21)$$

$$0,8x \geq h_f \quad (22)$$

$$b_f - b_w > 0 \quad (23)$$

$$b_f \leq b_w + 0,1 \cdot a \quad (24)$$

$$h_f \geq 8 \text{ cm} \quad (25)$$

$$b_f \geq L_0/50 \quad (26)$$

$$b_f \geq 0,4 \cdot h \quad (27)$$

## 5 METODOLOGIA

O procedimento utilizado neste trabalho para realizar a otimização de vigas de seção T de concreto armado submetida a flexão simples é semelhante ao apresentado por Spazzapan *et al.* (2019) que, em seu trabalho, estudou a otimização de vigas retangulares de concreto armado submetidas à flexão simples.

Uma vez estabelecido o problema matemático, implementou-se dois algoritmos computacionais para a resolução do problema. O primeiro algoritmo levou em consideração as restrições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014, enquanto que o segundo considerou as restrições impostas pela ABNT NBR 6118:2017. Ambos foram implementados no software MATLAB com a utilização da rotina própria *fmincon* presente em sua biblioteca de otimização. Vale

ressaltar que, como opção de método de otimização na rotina, foi definido o método dos pontos interiores, tendo como limite nos parâmetros os valores de  $1 \times 10^{-15}$  de erro numérico, 10000 como máximo de iterações e máximo de 30000 avaliações de função.

Os custos individuais de aço, concreto e fôrmas foram estabelecidos a partir da tabela do SINAPI (2021) – Sistema Nacional de Pesquisa de Custos e Índices da Construção Civil – na região de Curitiba, na composição custo sintético desonerado, com data de referência técnica de 13 de março de 2021. Para o custo do aço, foi utilizado o item “aço para armação de pilar ou viga de uma estrutura convencional de concreto armado em um edifício de múltiplos pavimentos utilizando aço CA-50, incluindo montagem” de diâmetros entre 8,0 mm a 16,0 mm, obtendo assim um custo médio de R\$ 12,63/kg. Para gastos com concreto, considerou-se R\$ 387,82/m<sup>3</sup>, sendo utilizado o item “concretagem de vigas e lajes com  $f_{ck}$  de 20 MPa, para lajes maciças ou nervuradas com uso de bomba em edificação com área média de lajes maior que 20 m<sup>2</sup>, incluindo lançamento, adensamento e acabamento”. Os custos em relação às fôrmas são de R\$133,35/m<sup>2</sup>, definido pelo item “montagem e desmontagem de fôrma de viga, escoramento com pontalete de madeira, pé direito simples, em madeira serrada, com 4 utilizações”.

## 6 RESULTADOS

Os resultados apresentados foram obtidos a partir de simulações numéricas realizadas em uma viga biapoiada sujeita a um carregamento uniformemente distribuído em todo o seu comprimento. Os parâmetros de entrada comuns a todas as análises estão definidos na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros de entrada.

Parâmetro	Valor atribuído
L	4 m
$f_{ck}$	20 MPa
Aço	CA-50
$E_s$	210 GPa
$\rho_s$	7850 kg/m <sup>3</sup>

$f_{yk}$	500 MPa
$d'$	3 cm

Fonte: Autoria própria.

Neste primeiro cenário são apresentados os resultados da otimização de vigas de concreto armado de seção T submetida a flexão simples considerando as especificações da ABNT NBR 6118:2014. Para tal, foram realizadas diversas análises estabelecendo o momento de cálculo ( $M_d$ ) no intervalo de 50 kN·m a 1200 kN·m. Para cada momento, foram obtidas as variáveis de projeto bem como o custo da seção otimizada. Os resultados foram organizados na Tabela 4

Tabela 4 – Variáveis de projeto e custo da seção otimizada atendendo as restrições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2014.

$M_d$ (kN·m)	$b_w$ (cm)	$b_f$ (cm)	$h_w$ (cm)	$h_f$ (cm)	Armadura (cm <sup>2</sup> )			$\rho$ (%)	Custo (R\$/m)
					Tração	Compressão	Total		
50	12,00	14,79	22,66	11,06	4,57	1,52E-08	4,57	1,05	171,79
100	12,00	17,30	29,03	14,22	6,96	8,75E-08	6,96	1,17	230,47
150	12,00	19,91	34,96	14,81	8,91	1,84E-07	8,91	1,25	275,30
200	12,00	22,07	39,96	15,22	10,57	6,68E-08	10,57	1,30	313,03
250	12,00	23,96	44,36	15,53	12,05	3,14E-07	12,05	1,33	346,23
300	12,00	25,73	48,40	15,92	13,31	3,01E-07	13,31	1,34	376,19
350	12,00	27,36	52,12	16,27	14,45	2,92E-07	14,45	1,35	403,70
400	12,00	28,86	55,59	16,57	15,52	2,85E-07	15,52	1,36	429,26
450	12,00	30,27	58,85	16,83	16,53	2,79E-05	16,53	1,36	453,23
500	12,00	31,60	61,93	17,07	17,48	2,75E-10	17,48	1,36	475,88
550	12,00	32,85	64,86	17,27	18,39	2,73E-07	18,39	1,37	497,41
600	12,00	34,05	67,66	17,46	19,27	2,67E-07	19,27	1,37	517,96
650	12,00	35,19	70,34	17,63	20,10	2,64E-07	20,10	1,37	537,65
700	12,00	36,29	72,92	17,79	20,91	5,21E-06	20,91	1,38	556,59
750	12,00	37,34	75,41	17,94	21,69	2,58E-07	21,69	1,38	574,86
800	12,00	38,36	77,82	18,07	22,44	2,56E-07	22,44	1,38	592,51
850	12,00	39,34	80,16	18,20	23,17	2,54E-07	23,17	1,38	609,62
900	12,00	40,30	82,43	18,32	23,89	2,52E-07	23,89	1,38	626,22
950	12,00	41,22	84,63	18,43	24,58	2,50E-08	24,58	1,38	642,36
1000	12,00	42,12	86,78	18,53	25,25	2,49E-07	25,25	1,39	658,08
1050	12,00	43,00	88,88	18,63	25,91	2,47E-07	25,91	1,39	673,40
1100	12,00	43,86	90,92	18,73	26,56	2,46E-07	26,56	1,39	688,36
1150	12,00	44,69	92,92	18,81	27,19	2,45E-07	27,19	1,39	702,98
1200	12,00	45,51	94,88	18,90	27,80	2,44E-07	27,80	1,39	717,28

Fonte: Autoria própria.

Na Tabela 5 é apresentada a relação entre a altura útil da seção ( $d$ ) e a posição da linha neutra ( $x$ ) na seção transversal da viga otimizada. É importante notar que para momentos de cálculo inferiores a 300 kN·m a restrição referente



a ductilidade do elemento estrutural, representada por  $x \leq 0,45d$  para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa foi a restrição limitante do problema. Pode-se dizer que, nestes casos, a solução ótima é obtida quando toda a capacidade de compressão do concreto é considerada, dentro dos parâmetros estabelecidos pela norma.

Quando se analisa os resultados obtidos para momentos fletores de cálculo superiores a 300 kN·m verifica-se que a combinação das variáveis que formam a solução ótima do problema não é definida na máxima capacidade de compressão do concreto, uma vez que a restrição de ductilidade deixa de ser a restrição ativa do problema. Este comportamento tende a ser mais evidenciado à medida que se projeta elementos submetidos a momentos fletores mais elevados.

Tabela 5 – Relação entre a posição da linha neutra e altura útil da viga considerando o estabelecido pela ABNT NBR 6118:2014.

$M_d$ (kN·m)	$d$ (cm)	$x$ (cm)	$\frac{x}{d}$
50	30,71	13,82	0,45
100	40,25	18,11	0,45
150	46,76	21,04	0,45
200	52,17	23,48	0,45
250	56,89	25,60	0,45
300	61,32	26,87	0,44
350	65,39	27,88	0,43
400	69,16	28,79	0,42
450	72,68	29,62	0,41
500	75,99	30,38	0,40
550	79,13	31,09	0,39
600	82,12	31,76	0,39
650	84,97	32,38	0,38
700	87,71	32,98	0,38
750	90,35	33,54	0,37
800	92,90	34,08	0,37
850	95,36	34,60	0,36
900	97,74	35,09	0,36
950	100,06	35,57	0,36
1000	102,31	36,03	0,35
1050	104,51	36,47	0,35
1100	106,65	36,91	0,35
1150	108,73	37,33	0,34
1200	110,77	37,73	0,34

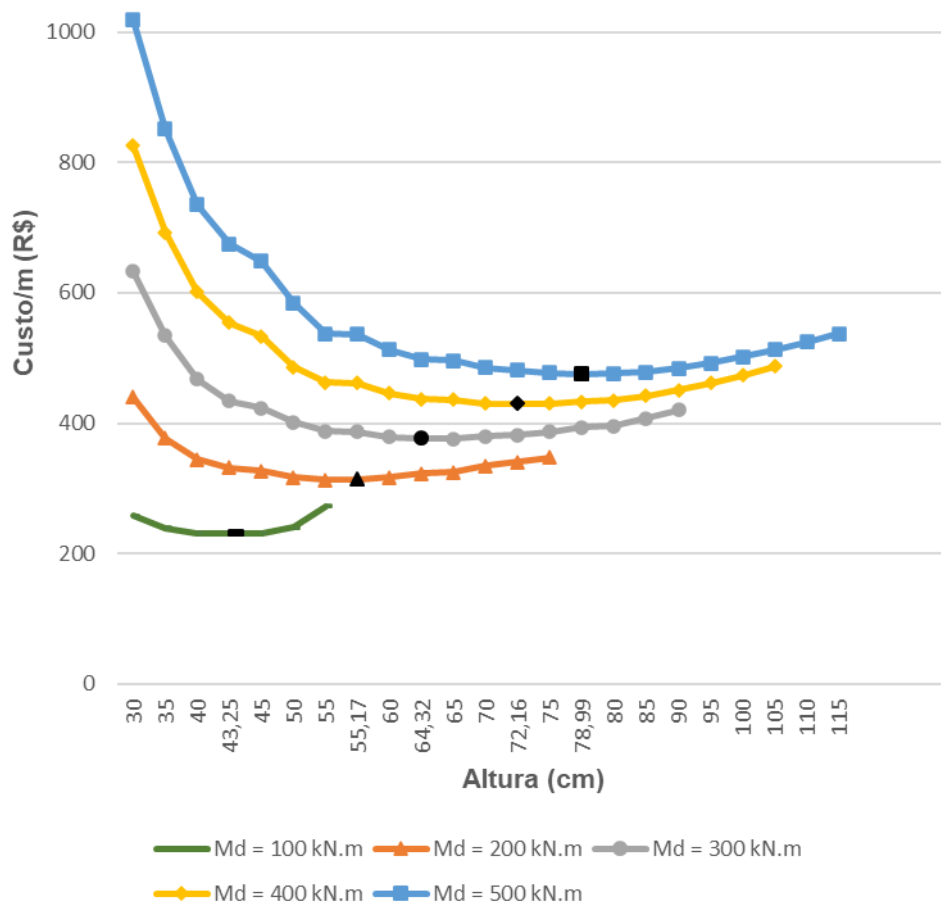
Fonte: Autoria própria.

Para validar os resultados obtidos no algoritmo implementado, para cada momento de cálculo no intervalo de 100 kN·m a 500 kN·m foram feitas simulações numéricas fixando-se a altura total da seção transversal como

parâmetro de entrada de modo que o algoritmo determinasse as demais variáveis do problema de maneira otimizada.

As simulações foram realizadas variando-se a altura total da viga em incrementos de 5 cm. Após dimensionadas, para cada caso foi calculado o custo por metro da viga. Na Figura 3 são ilustradas as curvas de custo versus altura total de seção transversal para os momentos fletores de cálculo em questão.

Figura 3 – Validação de resultados.



Fonte: Autoria própria.

A análise da Figura 3 permite concluir que somente uma seção transversal define o custo mínimo do elemento estrutural. As demais soluções atendem as condições de equilíbrio da seção transversal e restrições de norma, porém implicam em um custo maior para a fabricação do elemento estrutural em questão.

Visando estabelecer o comparativo entre as versões da norma, a mesma análise foi realizada atendendo, agora, as restrições estabelecidas na versão

ABNT NBR 6118:2007. Os resultados obtidos para  $M_d$  no intervalo de 50 kN·m a 1200 kN·m foram organizados na Tabela 6.

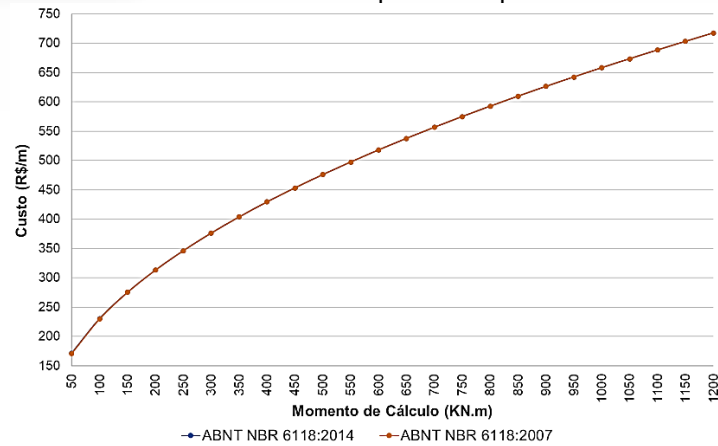
Tabela 6 – Variáveis de projeto e custo da seção otimizada atendendo as restrições estabelecidas pela ABNT NBR 6118:2007.

$M_d$ (kN·m)	$b_w$ (cm)	$b_f$ (cm)	$h_w$ (cm)	$h_f$ (cm)	Armadura (cm <sup>2</sup> )			$\rho$ (%)	Custo (R\$/m)
					Tração	Compressão	Total		
50	12,00	13,79	21,33	12,22	4,71	7,79E-08	4,71	1,11	170,98
100	12,00	17,01	28,87	13,66	7,21	2,07E-08	7,21	1,25	230,01
150	12,00	19,64	34,79	14,32	9,16	1,78E-08	9,16	1,31	275,12
200	12,00	21,94	39,87	14,99	10,70	1,65E-08	10,70	1,33	312,99
250	12,00	23,94	44,35	15,50	12,07	1,57E-08	12,07	1,34	346,22
300	12,00	25,73	48,40	15,92	13,31	3,83E-08	13,31	1,34	376,19
350	12,00	27,36	52,12	16,27	14,45	3,66E-08	14,45	1,35	403,70
400	12,00	28,86	55,59	16,57	15,52	1,43E-08	15,52	1,36	429,26
450	12,00	30,27	58,85	16,83	16,53	1,40E-09	16,53	1,36	453,23
500	12,00	31,60	61,93	17,06	17,48	1,37E-09	17,48	1,36	475,88
550	12,00	32,85	64,86	17,27	18,39	3,38E-08	18,39	1,37	497,41
600	12,00	34,05	67,66	17,46	19,27	3,34E-08	19,27	1,37	517,96
650	12,00	35,19	70,34	17,63	20,10	3,30E-08	20,10	1,37	537,65
700	12,00	36,29	72,92	17,79	20,91	3,26E-09	20,91	1,38	556,59
750	12,00	37,34	75,41	17,94	21,69	3,23E-08	21,69	1,38	574,86
800	12,00	38,36	77,82	18,08	22,44	3,20E-09	22,44	1,38	592,51
850	12,00	39,34	80,16	18,20	23,17	6,35E-06	23,17	1,38	609,62
900	12,00	40,30	82,43	18,32	23,89	1,26E-06	23,89	1,38	626,22
950	12,00	41,22	84,63	18,43	24,58	6,26E-08	24,58	1,38	642,36
1000	12,00	42,12	86,78	18,53	25,25	6,22E-08	25,25	1,39	658,08
1050	12,00	43,00	88,88	18,63	25,91	6,18E-08	25,91	1,39	673,40
1100	12,00	43,86	90,92	18,72	26,56	6,15E-08	26,56	1,39	688,36
1150	12,00	44,69	92,92	18,81	27,19	6,12E-08	27,19	1,39	702,98
1200	12,00	45,51	94,88	18,90	27,80	6,09E-08	27,80	1,39	717,28

Fonte: Autoria própria.

As curvas de momento de cálculo ( $M_d$ ) versus custo estão ilustradas na Figura 4.

Figura 4 – Momento de cálculo *versus* custo por metro para as duas versões de norma.

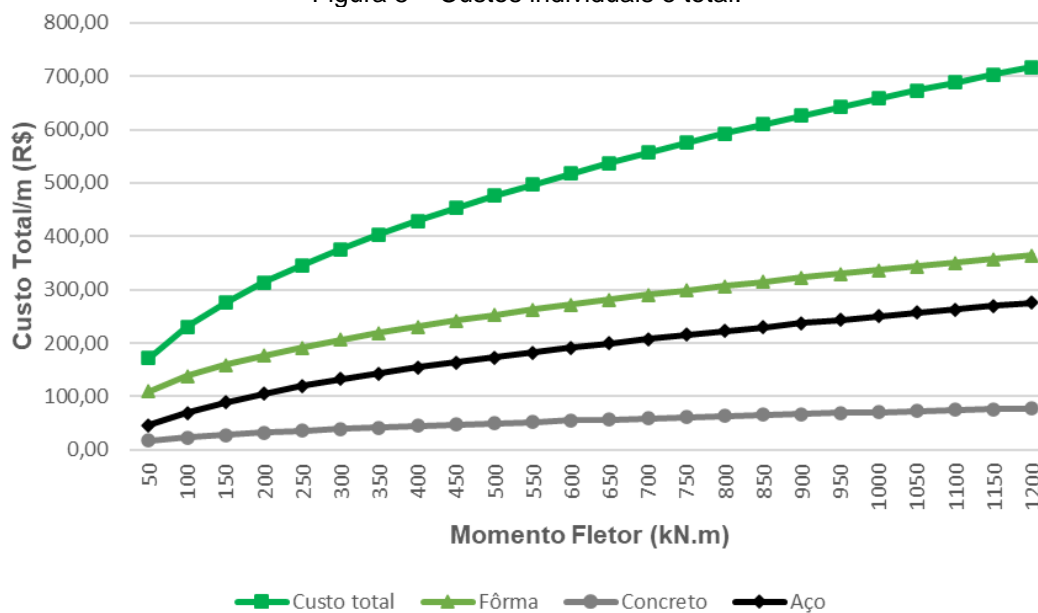


Fonte: Autoria própria.

A análise comparativa entre as tabelas 4 e 6 bem como a análise da Figura 4 demonstram que a versão ABNT NBR 6118:2014 proporciona um dimensionamento ligeiramente menos econômico (em média 0,15%) do que a sua versão mais antiga para momentos de cálculo ( $M_d$ ) inferior a 250 kN·m. Para momentos superiores a 250 kN·m, o custo ótimo de produção dos elementos estruturais dimensionados segundo as duas versões de norma é o mesmo.

Para finalizar, a Figura 5 traz os custos individuais de concreto, aço e fôrma, bem como o custo total da viga otimizada.

Figura 5 – Custos individuais e total.



Fonte: Autoria própria.

Analisando-se a Figura 5 é possível verificar que, o custo médio da fôrma representa 53,58% do custo total de fabricação do elemento estrutural em questão, enquanto que os custos do concreto e do aço representam, em média, 10,47% e 35,95%, respectivamente, do custo total de fabricação. Tais porcentagens evidenciam o alto custo da fôrma na composição do custo total do elemento estrutural.

Infelizmente esse é um custo intrínseco ao processo de fabricação de elementos estruturais em concreto armado, pois o concreto necessita que seja moldado de acordo com as características geométricas estabelecidas em projeto. Ainda, pode-se observar a necessidade da correta preservação e reutilização das fôrmas, pois, assim, seu custo acaba sendo dissolvido na produção de vários elementos estruturais. Por fim, ressalta-se que a reutilização de tal material não foi considerada neste trabalho.

## 7 CONCLUSÕES

De modo geral, o trabalho demonstra a viabilidade e a importância do uso de algoritmos voltados à otimização de vigas, particularmente às de seção transversal T, quando há intuito de minimizar os custos em comparação aos métodos usualmente empregados para o dimensionamento estrutural. Nesse sentido, o trabalho apresenta aos engenheiros estruturais uma alternativa para realizar seus projetos de forma mais econômica, impactando diretamente na sociedade.

A implementação do algoritmo computacional no software MATLAB utilizando a rotina “fmincon” presente em sua biblioteca de otimização, demonstrou a eficiência de tal rotina associada ao método dos pontos interiores para aplicação no problema proposto, uma vez que foi capaz de definir pontos de mínimo local para a função custo, satisfazendo as restrições e atendendo aos critérios de parada.

A análise comparativa entre as versões de norma ABNT NBR 6118:2003 e ABNT NBR 6118:2014 demonstrou que a versão mais antiga da norma proporciona uma economia em projetos de vigas de seção transversal T

submetidas a momentos solicitantes de cálculo mais reduzidos. No entanto, a economia não é significativa. Isso acontece, principalmente, devido à posição da linha neutra nas seções transversais das vigas de concreto armado de seção T não serem a restrição limitante de projeto de elementos mais solicitados. Assim, conclui-se que as mudanças trazidas pela versão mais atual da norma não impactam significativamente o custo financeiro de projetos de vigas de seção T.

Com relação aos custos individuais de cada material na composição do custo total do elemento estrutural, o trabalho evidenciou o alto custo intrínseco das fôrmas na construção de elementos estruturais de concreto armado. Diante disso, como já é de amplo conhecimento no meio técnico e científico, a correta preservação e reutilização das fôrmas, ou mesmo a utilização de materiais mais resistentes como o aço, por exemplo, tornam-se imprescindíveis para a execução de obras de forma mais econômica.

Como limitações do trabalho, pontua-se que alguns critérios de projeto não foram considerados. No que se refere às áreas de aço apresentadas e à largura da seção transversal, é necessário que o projetista adeque as bitolas das barras de aço de forma a garantir o correto espaçamento entre as mesmas e entre as barras e as faces do elemento. O mesmo pode ocorrer em regiões de ancoragem e zonas de transpasses de barras. Já no que se refere à altura da seção transversal, é necessário a adoção de armadura de pele em vigas com altura superior a 60 cm. Por fim, ressalta-se que, no segundo semestre de 2023, a Associação Brasileira de Normas Técnicas publicou uma nova versão da NBR 6118. Nesse sentido, propõe-se para o desenvolvimento de trabalhos futuros, a atualização deste trabalho de modo a contemplar os critérios estabelecidos por essa nova versão de norma e o estudo do impacto financeiro introduzido no projeto de vigas T por essa atualização.

## REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2007.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**: segundo a NBR 6118:2014. 4. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2014.

CORREIA, R. S.; BONO, G. F.; BONO, G. Otimização de vigas de concreto armado com seção T utilizando algoritmos evolucionários. **Mecânica Computacional**, La Plata, v. XXXV, n. 29, p. 1665-1681, 2017.

NOGUEIRA, C. G. **Desenvolvimento de modelos mecânicos, de confiabilidade e de otimização para aplicação em estruturas de concreto armado**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

PINTO JUNIOR, E. C. **Otimização de seções de concreto armado**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

RODRIGUES, T. A. **Dimensionamento otimizado de vigas mistas aço-concreto**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2018.

SILVA, A. B. C.; FALCÓN, G. A. S.; GARCIA, S. L. G. Dimensionamento ótimo de Vigas de Concreto Armado com Seção T. **Mecânica Computacional**, Buenos Aires, v. XXIX, n. 94, p. 9217-9230, nov. 2010.

SILVA, A. B. C. **Dimensionamento ótimo de seções de vigas T em concreto armado**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2011.

SPAZZAPAN, A. A.; WAIDEMAM, L.; SILVA, T. C. Dimensionamento otimizado de vigas retangulares de concreto armado: estudo comparativo entre as versões ABNT NBR 6118:2014 e ABNT NBR 6118:2007. *In*: **61º Congresso Brasileiro do Concreto**. Fortaleza, IBRACON, 2019.